SÉRIE „Právní a organizační základy veřejné správy“

[https://doi.org/10.52058/2695-1592-2021-2\(2\)-146-155](https://doi.org/10.52058/2695-1592-2021-2(2)-146-155)

Віталій Клобуков

Асистент кафедри засобів захисту інформації, Факультету кібербезпеки комп'ютерної та програмної інженерії, Національний Авіаційний Університет, м Київ, Україна, E-mail: kvv@nau.edu.ua <https://orcid.org/0000-0002-7486-9695>

Анатолій Білецький

Доктор технічних наук, професор кафедри електроніки, робототехніки, технологій моніторингу та інтернету речей, Факультет аеронавігації, електроніки та телекомунікацій, Національний Авіаційний Університет, м Київ, Україна, e-mail: abelnau@ukr.net

Андрій Миколушко

*Асистент кафедри електроніки, робототехніки і технологій моніторингу та інтернету речей, Факультет аеронавігації, електроніки та телекомунікацій, Національний авіаційний університет, м. Київ, Україна.
E-mail: andrii.mykolushko@npp.nau.edu.ua, 9shik@nau.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-2767-8255>*

ДЕЯКІ АСПЕКТИ СИНТЕЗУ БАЗИСНИХ СИСТЕМ ВІЛЕНКІНА-КРЕСТЕНСОНА ФУНКЦІЙ

Анотація. Розглянуті питання присвячені синтезу базисних систем Віленкіна-Крестенсона функцій. Показано зв'язок між системами дискретно-експоненційних функцій, функцій Уолша і Віленкіна-Крестенсона функцій. Крім того, розглянути алгоритми синтезу дочірніх базисів цих наборів функцій, дані деякі оцінки систем дискретно-експоненційних функцій, функцій Уолша і Віленкіна-Крестенсона функцій із заданими параметрами. За допомогою методу індикаторних матриць проілюстрована можливість застосування складових кодів Грея для синтезу базисів функції Віленкіна-Крестенсона і функцій Уолша.

Ключові слова: функції Віленкіна-Крестенсона, синтез, базисні системи, дискретно-експоненційні функції, система функцій Уолша, симетричні дочірні системи

Vitaliy Klobukov

*Assistant of the Department of Information Security, Faculty of Cybersecurity,
Computer and Software Engineering, National Aviation University, Kyiv, Ukraine, e-
mail: kvv@nau.edu.ua,
<https://orcid.org/0000-0002-7486-9695>*

Anatoliy Biletsky

*Full Professor, Dr.Sc., Ph.D (Engineering) of the Department of the Department of
Electronics, Robotics, Monitoring and IoT Technologies, Faculty of Air Navigation,
Electronics & Telecommunications, National Aviation University, Kyiv, Ukraine, e-
mail: abelnau@ukr.net*

Andriy Mykolushko

*Assistant of the Department of Electronics, Robotics, Monitoring and IoT
Technologies, Faculty of Air Navigation, Electronics & Telecommunications, Nation
Aviation University, Kyiv, Ukraine.
E-mail: andrii.mykolushko@npp.nau.edu.ua, 9shik@nau.edu.ua
<https://orcid.org/0000-0002-2767-8255>*

**SOME ASPECTS OF SYNTHESIS OF BASIC SYSTEMS OF VILENKIN-
CRESTENSON FUNCTIONS**

Abstract. The considered questions are devoted to the synthesis of basic Vilenkin-Crestenson systems of functions. The connection between systems of discrete-exponential functions, Walsh functions and Vilenkin-Crestenson functions is shown. In addition, to consider the algorithms for the synthesis of child bases of these sets of functions, some estimates of systems of discrete-exponential functions, Walsh and Vilenkin-Crestenson functions with given parameters are given. Using the method of indicator matrices, the possibility of using the components of Gray codes for the synthesis of the bases of the Vilenkin-Crestenson function and the Walsh function is illustrated.

Keywords: Vilenkin-Crestenson functions, synthesis, basis systems, discrete-exponential functions, Walsh function system, symmetric daughter systems

Постановка проблеми. Класичні перетворення Фур'є над безперервним нескінченним у часі сигналом, що переводять його з тимчасової області в частотну, виконуються за допомогою виразу [1]:

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t) e^{-j\omega t} dt$$

(1)

де $\dot{X}(\omega)$ – безперервний спектр сигналу в базисі Фур'є, $e^{-j\omega t}$ – комплексна експоненціальна функція двох змінних, що представляє собою базис континуальних перетворень Фур'є, t – час, ω – частота. Таким чином, континуальний базис Фур'є визначений на нескінченному інтервалі часу і нескінченному інтервалі частот.

При дискретних перетвореннях Фур'є кінцевих у часі дискретних сигналів час t замінюється цілочисельним параметром l , таким, що $t = lT$, де T – період дискретизації. Замість частоти ω використовується цілочисельний параметр k : $\omega = \frac{k}{T}$. Причому і час, і частота обмежені N відліками: $l, k = \overline{0 \dots N-1}$. При цьому безперервний базис $e^{-j\omega t}$ перетворюється у безліч з N базисних дискретно-експоненційних функцій (ДЕФ). Аналітично дискретний класичний базис Фур'є задається наступним виразом:

$$f_k(l) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}. \quad (2)$$

Тут параметр k (дискретна частота) відіграє роль номера функції в базисі, а параметр l (дискретний час) – аргумент базисної функції.

Для спрощення подальших записів введемо наступне позначення для фазообертаючого множника:

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}. \quad (3)$$

Для підготовки до дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) безперервний сигнал $\dot{x}(t)$ обмежується інтервалом $[0; (N-1)T]$ і дискретизується у часі з періодом дискретизації T . Отриманий дискретний сигнал $\dot{x}(t)$ складається з N відліків.

Формула (2.1) для випадку ДПФ з урахуванням (3) набуває такого вигляду:

$$\dot{X}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}(l)W^{kl}. \quad (4)$$

Тут $\dot{X}(k)$ – набір комплексних коефіцієнтів, що є спектром дискретного сигналу $\dot{x}(t)$ в класичному дискретному базисі Фур'є.

Оригінальний сигнал може бути відновлений зі спектра $\dot{X}(k)$ за допомогою формули

$$\dot{x}(l) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \dot{X}(k)W^{-kl}. \quad (5)$$

Пара виразів (2.4) і (2.5) задає відповідно прямі і зворотні класичні ДПФ [6].

У загальному ж випадку формула для узагальнених перетворень Фур'є над сигналом $\dot{x}(l)$ має такий вигляд:

$$\dot{X}^{(\phi)}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} \dot{x}(l)\phi_k(l),$$

Де $\dot{X}^{(\phi)}(k)$ – k -й спектральний коефіцієнт розкладання сигналу $\dot{x}(l)$ в узагальнений дискретний ряд Фур'є, $\phi_k(l)$ – l -й відлік k -й базисної функції.

Кінцеве $\dot{x}(l)$ традиційно називається вибіркою сигналу $\dot{x}(t)$, а число N – об'ємом вибірки.

Будь-яка дискретна функція $\dot{x}(l)$ (в загальному випадку комплексна), що складається з N відліків, може бути представлена у вигляді вектора $\bar{x}$ в N -вимірному лінійному векторному просторі [2]. При цьому узагальнена дискретне перетворення Фур'є буде являти собою ортогональне перетворення, що переводить вектор $\bar{x}$ з одного базису до іншого. Базисом векторного простору

називається така безліч векторів цього простору, що будь-який вектор цього простору може бути однозначно представлений лінійною комбінацією векторів цієї множини. Вектори, що становлять базис, називаються базисними векторами.

На практиці для здійснення векторних перетворень найчастіше застосовують ортогональні системи базисних векторів. До таких систем відносяться, зокрема, система ДЕФ і система функцій Уолша, представлені у вигляді наборів векторів. Обидва цих базиса набули широкого поширення в системах передачі та обробки даних в якості базисів ортогональних перетворень: класичного дискретного перетворення Фур'є і перетворення Уолша.

Обидва цих базиса є окремими випадками систем Віленкіна-Крестенсона функцій (ВКФ).

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проблематикою дослідження та прикладного використання базисних систем Віленкіна-Крестенсона функцій, займалися багато вітчизняних та міжнародних вчених, зокрема Трахтман А. М., Трахтман В. А., Машарський С. М., Білецький А. Я., Умняшкін С. В., Шустиков О. Є., Назаров Л.Є., Агієвич С. М., Щетінін В. І., Малозьомов В. Н. та інші.

Мета статті: Розгляд деяких аспектів синтезу базисних систем Віленкіна-Крестенсона функцій.

Виклад основного матеріалу. Функції Віленкіна-Крестенсона ВКФ були запропоновані і вивчені в континуальному варіанті Віленкіна і Крестенсона [3 - 5]. Материнська система ВКФ, яку будемо називати системою ВКФ-Кронека і позначати $H_{m,n}$, виходить із системи ДЕФ m -го порядку шляхом зведення її в n -у кронекерівську ступінь [6 - 10]:

$$H_{m,n} = E_m^{[n]}.$$

Очевидно, що система ВКФ-Кронека будь-якого прядка може бути задана двома параметрами: m – основа системи числення, на якій заснована система ВКФ-Кронека, n – кронекерівська ступінь.

Розглянемо такий приклад. В якості порядку матриці ДЕФ виберемо число $m = 2$. При цьому

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = e^{-j\pi} = -1,$$

а ізоморфне відображення матриці E_2 збігається з матрицею Уолша-Адамара H_2 :

$$E_2 = H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Правило, що використовується для синтезу системи Уолша-Адамара, описує операцію кронекерівського зведення в ступінь матриці (6). Саме тому можна стверджувати, що системи функцій Уолша-Адамара є окремим випадком систем ВКФ-Кронека при $m = 2$.

Будь-яка матриця ДЕФ є першим кронекерівським ступенем самої себе, тому система ДЕФ технічно є окремим випадком системи ВКФ-Кронека при $n = 1$.

Матриця ДЕФ порядку $N = 3$ виглядає наступним чином:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2l \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

k

Її другий кронекерівський ступінь, утворюючий матрицю ВКФ-Кронекера приймає такий вигляд:

$$H_{3,2} = E_3^{[2]} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8l \\ \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (7)$$

k

При цьому ізоморфна матриця (2.56 7) містить в своїх рядках показники ступенів, в які потрібно звести фазообертаючий множник

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad (8)$$

щоби отримати l -й відлік k -ї базисної функції ВКФ-Кронекера.

Номери рядків матриці $H_{3,2}$ записані в трійчастій системі числення. Це зроблено для того, щоби показати, як за допомогою m -ічної інверсії номерів рядків ця матриця перетворюється в матрицю ВКФ-Пелі:

$$P_{3,2} = \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8l \\ \begin{matrix} 00 \\ 10 \\ 20 \\ 01 \\ 11 \\ 21 \\ 02 \\ 12 \\ 22 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (9)$$

k

Аналітично система ВКФ-Кронекера порядку $N = m^n$ описується за допомогою наступного виразу:

$$had_k(l) = W^{\sum_{i=0}^{n-1} k_i l_i},$$

де $had_k(l)$ – l -й відлік k -ї базисної функції ВКФ-Кронекера, множник W заданий співвідношенням (8), k_i , l_i – розрядні коефіцієнти m -ічного уявлення чисел k і l .

Система ВКФ-Пелі задається наступним виразом:

$$pal_k(l) = W^{\sum_{i=0}^{n-1} k_{n-i-1} l_i}.$$

Дочірні симетричні системи ВКФ можуть бути отримані із системи ВКФ-Кронекера перестановкою її рядків. Метод індикаторних матриць, описаний вище, може бути використаний і для синтезу симетричних систем ВКФ.

У даній роботі індикаторними матрицями симетричних систем ВКФ порядку $N = m^n$ будемо називати такі квадратні матриці порядку n , що заповнені натуральними числами від 0 до $m - 1$, які встановлюють однозначну відповідність

$$k' = \text{mod}_m(k \cdot M)$$

між номером k базисної функції системи ВКФ-Пелі та номером k' рядка матриці нової системи ВКФ, в яку дана функція переміщується.

Для того аби матриця M порядку n , що складається з чисел від 0 до $m - 1$, була індикаторною для симетричної системи ВКФ, повинні виконуватися наступні умови:

- 1) M повинна мати правосторонню симетрію;
- 2) її визначник, взятий за модулем m , не повинен мати з m спільних дільників і не повинен бути рівний нулю.

В якості прикладу розглянемо матрицю ВКФ-Пелі з параметрами:

$$m = 3, n = 2:$$

$$P_{3,2} = \begin{matrix} & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8l \\ \begin{matrix} 00 \\ 01 \\ 02 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right] \end{matrix}.$$

Матриця інверсної перестановки

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

є індикаторною для матриці ВКФ-Кронекера:

$$H_{3,2} = \begin{matrix} & & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8l \\ \begin{matrix} 00 \\ 10 \\ 20 \\ 01 \\ 11 \\ 21 \\ 02 \\ 12 \\ 22 \\ k \end{matrix} & \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix} \right] \end{matrix}.$$

В якості наступного прикладу розглянемо індикаторну матрицю

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Результати перетворення натурального ряду чисел від 0 до 8, представлених в трійчастій системі числення представлені в табл. 1.

Таблиця 1

Синтез дочірньої системи ВКФ

Номер функции ВКФ-Пэли	Троичный номер	Преобразованный номер	Номер строки новой матрицы ВКФ
0	00	00	0
1	01	02	2
2	02	01	1
3	10	20	6
4	11	22	8
5	12	21	7
6	20	10	3
7	21	12	5
8	22	11	4

Переупорядкувавши рядки матриці ВКФ-Пелі згідно табл. 1, приходимо до наступної дочірньої симетричної системі ВКФ:

$$V_{3,2}^{(M)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8l \end{matrix} \\ \begin{matrix} 00 \\ 02 \\ 01 \\ 20 \\ 22 \\ 21 \\ 10 \\ 12 \\ 11 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Кількість індикаторних матриць симетричних систем ВКФ, як і у випадку із симетричними системами Уолша, дорівнює кількості самих симетричних систем. Якщо m – просте число, то ця кількість становить [10]

$$L_{m,n} = L_{m,1} \prod_{i=2}^n (m^i - \text{mod}_2(i)),$$

де $L_{m,1} = \phi(m)$.

Якщо m є ступенем простого числа m_1 :

$$m = m_1^k$$

то кількість симетричних матриць визначається за допомогою рекурентної формули

$$L_{m_1^{k+1},n} = L_{m_1^k,n} \cdot m_1^{\frac{n(n+1)}{2}}. \quad (10)$$

У разі, коли m являє собою сукупність ступенів s простих чисел:

$$m = \prod_{i=1}^s m_i^{k_i},$$

кількість симетричних матриць ВКФ (і індикаторних матриць) визначається виразом

$$L_{m,n} = L_{m,1} \prod_{i=1}^s L_{m_i^{k_i},n}.$$

Варто відзначити, що один із методів синтезу симетричних дочірніх систем ДЕФ, також може бути названий методом індикаторних матриць. При цьому розмір індикаторної матриці вироджується до 1×1 (оскільки система ДЕФ – окремий випадок системи ВКФ із параметрами $m = N, n = 1$) і матриця вироджується в число.

Проведемо синтез усіх симетричних систем ВКФ порядку $N = 3^2 = 9$ за допомогою m -ічних складових кодів Грея. Згідно з оцінкою (10) кількість таких систем дорівнює $L_{3,2} = 18$.

Матриця ВКФ-Кронекера зазначеного порядку виходить зведенням до другого кронекерівського ступеня матриці, як це показано в (7). Матриця ВКФ-Пелі (9) отримана шляхом трійочної інверсії номерів матриці (7). Використовуючи в якості індикаторних матриць, відповідним матрицям трійчастих операторів перетворення Грея

$$g_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

і

$$g_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

можна отримати матриці $A_{3,2}, B_{3,2}, C_{3,2}, W_{3,2}$. Матриці $C_{3,2}$ і $W_{3,2}$ виходять з матриці ВКФ-Пелі таким же чином, як і матриці Уолша-Кулі і Уолша-Качмажа виходять з матриці Уолша-Пелі. Тому будемо називати матриці $C_{3,2}$ і $W_{3,2}$ матрицями ВКФ-Кулі та ВКФ-Уолша відповідно по аналогії з матрицями Уолша.

Розглянемо дочірню систему ДЕФ третього порядку $E_3^{(2)}$:

$$0 \quad 1 \quad 2l$$

$$E_3^{(2)} = \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ k \end{matrix}.$$

Звівши її в другий кронекерівський ступінь, отримаємо матрицю ВКФ-Кронекера $H_{3,2}^{(2)}$:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8l$$

$$H_{3,2}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (11)$$

Переставивши рядки матриці (11) за законом трієчної інверсії, прийдемо до матриці ВКФ-Пелі $P_{3,2}^{(2)}$:

$$P_{3,2}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (12)$$

Матриця (12) також може бути використана для синтезу симетричних матриць, як і матриця (9). Решта 6 симетричних систем ВКФ $V_{3,2}$ можна отримати за допомогою потрібного складеного коду Грея $G = 212$, матриця перетворення якого виглядає наступним чином:

$$M_{212} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Повний граф взаємозв'язку між симетричними системами ВКФ при $m = 3$, $n = 2$ показаний на рис. 2.

Рис. 2 – Повне сімейство симетричних систем ВКФ при $m = 3$, $n = 2$

Висновки. Показано, що базиси ДЕФ і Уолша є окремими випадками базисів ВКФ. Розглянуто алгоритми формування дочірніх симетричних базисних систем ДЕФ, функцій Уолша і ВКФ. Наведені аналітичні описи фундаментальних систем Уолша і ВКФ. За допомогою складових кодів Грея показано взаємозв'язок між симетричними системами функцій Уолша. За допомогою складових кодів Грея показано взаємозв'язок між симетричними системами ВКФ з параметрами $m = 3, n = 2$.

Література:

1. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. Перевод с английского. – М.: Мир, 1968 г. – 276 с.
2. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. Перевод с английского. – М.: Физматгиз, 1963 г. – 264 с.
3. Виленкин Н. Я. Об одном классе полных ортонормальных систем // Известия Академии наук СССР, 1947, №11, с. 363 - 400.
4. Виленкин Н. Я. К теории лакунарных ортогональных систем // Известия Академии наук СССР, 1949, №13, с. 245 - 252.
5. Chrestenson H. E. A class of generalized Walsh functions // Pacific J. Math. 1955. Vol. 5. No. 1. P. 17-31.
6. Трахтман А.М., Трахтман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. — М.: Советское радио, 1975. — 208 с.
7. Аршинов М.Н., Садовский Л.Е. Коды и математика. — М.: Наука, 1983. — 144 с.
8. Дагман Э.Е., Кухарев Г.А. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. — Новосибирск: Наука, 1983. — 233 с.
9. Воеводин В.В. Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
10. Белецкий А.Я., Белецкий А.А., Белецкий Е.А. Преобразования грея. Т.2. — К.: Книжное издательство НАУ, 2007. — 644 с.

References:

1. Bremerman G. Raspredelenija, kompleksnye peremennye i preobrazovanija Fur'e. Perevod s anglijskogo. – M.: Mir, 1968 g. – 276 s.
2. Halmosh P. Konechnomernye vektornye prostranstva. Perevod s anglijskogo. – M.: Fizmatgiz, 1963 g. – 264 s.
3. Vilenkin N. Ja. Ob odnom klasse polnyh ortonormal'nyh sistem // Izvestija Akademii nauk SSSR, 1947, №11, s. 363 - 400.
4. Vilenkin N. Ja. K teorii lakunarnyh ortogonal'nyh sistem // Izvestija Akademii nauk SSSR, 1949, №13, s. 245 - 252.
5. Chrestenson N. E. A class of generalized Walsh functions // Pacific J. Math. 1955. Vol. 5. No. 1. P. 17-31.
6. Trahtman A.M., Trahtman V.A. Osnovy teorii diskretnyh signalov na konechnyh intervalah. — M.: Sovetskoe radio, 1975. — 208 s.
7. Arshinov M.N., Sadovskij L.E. Kody i matematika. — M.: Nauka, 1983. — 144 s.
8. Dagman Je.E., Kuharev G.A. Bystrye diskretnye ortogonal'nye preobrazovanija. — Novosibirsk: Nauka, 1983. — 233 s.
9. Voevodin V.V. Kuznecov Ju.A. Matricy i vychislenija. — M.: Nauka, 1984. — 320 s.
10. Beleckij A.Ja, Beleckij A.A., Beleckij E.A. Preobrazovanija greja. T.2. — K.: Knizhnoe izdatel'stvo NAU, 2007. — 644 s.