SÉRIE “Technologické vědy”

[https://doi.org/10.52058/2695-1592-2022-1\(8\)-241-254](https://doi.org/10.52058/2695-1592-2022-1(8)-241-254)

Михайло Горбійчук

*доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації і комп'ютерно-інтегрованих технологій, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ, Україна,
<https://orcid.org/0000-0002-8586-1883>*

Наталія Лазорів

*аспірантка кафедри автоматизації і комп'ютерно-інтегрованих технологій, Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, м. Івано-Франківськ, Україна,
<https://orcid.org/0000-0003-3595-910X>*

ДИСКРЕТИЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЛІНІЙНИХ ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

Анотація. При аналізі і синтезі цифрових систем керування необхідно мати інформацію про якість процесу керування. Найчастіше таку інформацію отримують із перехідних характеристик систем керування. Для неперервних систем такі характеристики отримати не складно. Характерною особливістю цифрових систем є те, що їх поведінка відома лише в дискретні моменти часу. Дослідження таких властивостей цифрових систем як стійкість оперяється на добре розвинутий апарат дискретного перетворення Лапласа. Але при зворотному переході від дискретного перетворення Лапласа до різницевих рівнянь виникають значні труднощі.

В роботі запропонований підхід переходу від неперервної моделі до різницевих рівнянь, який спирається на апарат кінцевих різниць. Отримані в такий спосіб різницеві рівняння можна використати як рекурентні процедури для побудови перехідних характеристик цифрових систем або об'єктів. Показано, що така процедура можлива лише в тому випадку, коли права частина неперервної моделі не вміщує похідних.

Запропонований метод безпосереднього переходу від неперервних моделей до дискретних моделей через подання неперервної моделі в просторі станів.

Запропонований метод ілюструється конкретним прикладом, який

підтверджує його ефективність.

Ключові слова: цифрова система, модель, дискретизація, крок дискретності, простір станів, передавальна функція, лишки.

Mykhailo Gorbiychuk

Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Automation and Computer-Integrated Technologies of Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine,
<https://orcid.org/0000-0002-8586-1883>

Nataliia Lazoriv

post-graduate student of the Department of Automation and Computer-Integrated Technologies of Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine,
<https://orcid.org/0000-0003-3595-910X>

DISCRETIZATION OF MATHEMATICAL MODELS OF LINEAR CONTROL OBJECTS

Abstract. When analyzing and synthesizing digital control systems, it is necessary to have information about the quality of the control process. Most often, such information is obtained from the transient characteristics of control systems. For continuous systems, such characteristics are not difficult to obtain. A characteristic feature of digital systems is that their behavior is known only in discrete moments of time. The study of such properties of digital systems as stability is based on a well-developed apparatus of discrete Laplace transform. But in the reverse transition from the discrete Laplace transform to difference equations there are significant difficulties.

The paper proposes an approach to the transition from a continuous model to difference equations, which is based on the apparatus of finite differences. The difference equations obtained in this way can be used as recurrent procedures to construct the transient characteristics of digital systems or objects. It is shown that such a procedure is possible only if the right part of the continuous model does not contain derivatives.

A method of direct transition from continuous models to discrete models through the representation of a continuous model in the state space is proposed.

The proposed method is illustrated by a specific example that confirms its effectiveness.

Keywords: digital system, model, sampling, discreteness step, state space, transfer function, surpluses.

Постановка проблеми. У цифрових системах керування неперервний сигнал за допомогою аналогового цифрового перетворювача (АЦП) трансформується в цифровий код, який є послідовністю значень, які пропорціональні амплітуді вхідного сигналу в дискретні моменти часу. Сигнал з виходу АЦП поступає в обчислювач, який реалізує певний алгоритм. Потім відбувається зворотне перетворення цифрового коду в неперервний сигнал, який подається на виконавчий механізм, що безпосередньо діє на об'єкт. Таке перетворення цифрового коду в неперервний сигнал здійснюється за допомогою цифро-аналогового перетворювача (ЦАП).

Динаміка об'єкта керування описується диференціальними рівняннями, які після лінеаризації трансформуються в лінійну математичну модель.

Таким чином, в цифровій системі керування є сигнали двох типів – дискретні та аналогові. Математичний опис такої «гібридної» системи нашоюхується на значні труднощі, а іноді і неможливий. Тому неперервну частину системи описують з використанням математичного апарату ґратчастих (дискретних) функцій.

Отримати дискретну математичну модель можна двома способами. Перший із них дає змогу знайти вихідну величину об'єкта в термінах Z-перетворення з наступним переходом до ґратчастої функції. Другий спосіб отримання дискретної математичної моделі неперервної частини цифрової системи безпосереднє використання лінійної математичної моделі, яка подана в формі лінійних диференціальних рівнянь.

Аналіз літературних джерел. Історично склалося так, що на початку дослідження дискретних систем керування для їх математичного опису використовували перехід від диференціальних до різницевих рівнянь.

Після появи Z-перетворення інтерес до такого способу математичного опису цифрових систем помітно впав.

Застосування Z-перетворення дає змогу вирішувати інженерні задачі щодо аналізу і синтезу цифрових систем керування, але при цьому трудно було встановити безпосередній зв'язок між неперервним і цифровим керуванням. Хоча на інтуїтивному рівні відчувалось, що такий взаємозв'язок повинен бути. Така концептуальна проблема знайшла своє вирішення при використанні дельта-перетворення [1 – 4].

В основі методу лежить ідея в переході від похідних до кінцевих різниць. Дійсно, похідній $\frac{dy(t)}{dt}$ можна поставити у відповідність кінцеву різницю першого порядку [5]

$$\frac{dy(t)}{dt} \square \frac{1}{t_0} (y(t+t_0) - y(t)) = \frac{1}{t_0} \Delta y(t),$$

де t_0 – крок дискретності.

Якщо перейти від неперервного до дискретного часу, то отримаємо дельта-оператор [4]

$$D[y(kt_0)] = \frac{1}{t_0} ((y((k+1)t_0) - y(kt_0))).$$

Дельта-оператор визначає відносну різницю між двома значеннями ґратчастої функції. У той же час різниці рівняння оперують абсолютними значеннями ординат $y(kt_0)$ у дискретні моменти часу. У цьому і полягає принципова різниця між різницеви́ми рівняннями і дельта-перетворе́нь.

Існує тісний взаємозв'язок між дельта- і Z-перетвореннями, який можна встановити, якщо врахувати, що період квантування t_0 є досить малим. Тоді функцію e^{pt_0} можна розкласти в ряд Тейлора з утриманням тільки лінійного члену розкладу. Отже,

$$e^{pt_0} \square 1 + pt_0.$$

Останній вираз запишемо у такому вигляді $1 + pt_0 = 1 + \frac{py(t)t_0}{y(t)}$. Оператор p розглядають [4] як оператор взяття похідної. Тому $1 + \frac{py(t)t_0}{y(t)} = 1 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{t_0}{y(t)}$. Замінімо похідну її наближеним значенням, то $1 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \frac{t_0}{y(t)} = \frac{y((k+1)t_0) - y(kt_0)}{y(kt_0)}$. Перехід до Z-перетворення дає такий результат: $e^{pt_0} \square 1 + t_0 \frac{z-1}{t_0}$.

Якщо увести позначення $\gamma = \frac{z-1}{t_0}$ і врахувати, що $z = e^{pt_0}$, то отримаємо взаємозв'язок між дельта- і Z-перетвореннями, тобто $z = 1 + t_0\gamma$.

Нехай $Y(z) = Z[y(kt_0)]$ і $Y(\gamma) = D[y(kt_0)]$. Тоді $Y(\gamma) = t_0 Y(z) \big|_{z=1+t_0\gamma}$. Останнє співвідношення випливає із визначення Z-перетворення і перетворення Лапласа, яке подано в дискретній формі та наступному їх порівнянні.

При $t_0 \rightarrow 0$ дельта-перетворення трансформується в перетворення Лапласа. Оскільки в основі дельта-перетворення лежить подання похідної її

наближеним значенням, то при кінцевому значенні кроку дискретності t_0 ординати перехідного процесу будуть обчислюватись з певною похибкою.

Дельта-перетворення як і Z-перетворення не дають можливості безпосередньо обчислювати ординати перехідних характеристик. Така задача просто вирішується коли математична модель цифрової системи подана як різницеве рівняння.

Отже, метою роботи є розроблення методу побудови перехідних характеристик цифрової системи через подання математичних моделей цифрової системи в просторі станів.

Дискретизація неперервної моделі. Розглядається модель об'єкта, яка задана у вигляді диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\begin{aligned} A_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + A_n y(t) = \\ = B_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + B_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + B_{m-1} \frac{du(t)}{dt} + B_m u(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Додатково допускаємо, що початкові умови рівняння (1) – нульові.

Є два способи, які рівносильні за своєю суттю. Перший із них передбачає [4], перехід від диференціальної до операторної форми моделі, заміною $\frac{d}{dt}$ на

p . Замінивши потім p на $\frac{z-1}{t_0}$, де t_0 – крок дискретності, отримаємо

дискретну модель в термінах Z-перетворення.

Другий спосіб передбачає заміну похідних їх наближеними значеннями [6]

$$\left. \frac{dy^i(t)}{dt^i} \right|_{t=kt_0} = \frac{1}{t_0^i} \Delta^i y(kt_0), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

$$\left. \frac{du^j(t)}{dt^j} \right|_{t=kt_0} = \frac{1}{t_0^j} \Delta^j u(kt_0), \quad j = \overline{1, m} \quad (3)$$

де $\Delta^i y(kt_0)$ і $\Delta^j u(kt_0)$ – різниці i -го та j -го порядків.

Якщо у рівнянні (1) похідні замінити їхніми наближеними значеннями (2) і (3), то у результаті такої заміни будемо мати:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \Delta^n y(kt_0) + \alpha_1 \Delta^{n-1} y(kt_0) + \dots + \alpha_{n-1} \Delta y(kt_0) + \alpha_n y(kt_0) = \\ = \beta_0 \Delta^m u(kt_0) + \beta_1 \Delta^{m-1} u(kt_0) + \dots + \beta_{m-1} \Delta u(kt_0) + \beta_m u(kt_0), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\alpha_i = \frac{A_i}{t_0^{n-i}}, i = \overline{0, n}; \beta_j = \frac{B_j}{t_0^{m-j}}, j = \overline{0, m}$.

Різницю i -го або j -го порядків можна виразити через ординати гратчастих функцій за такою формулою [7]:

$$\Delta^q \mu(kt_0) = \sum_{v=0}^q (-1)^{q-v} C_q^v \mu((k+v)t_0). \quad (5)$$

Змінна $\mu(kt_0)$ це $y(kt_0)$ або $u(kt_0)$.

Якщо використати формулу (5), то рівняння (4) можна привести до такого вигляду:

$$\begin{aligned} a_0 y((k+n)t_0) + a_1 y((k+n-1)t_0) + \dots + a_{n-1} y((k+1)t_0) + a_n y(kt_0) = \\ = b_0 u((k+m)t_0) + b_1 u((k+m-1)t_0) + \dots + b_{m-1} u((k+1)t_0) + b_m u(kt_0). \end{aligned} \quad (6)$$

Перерахунок коефіцієнтів різницевого рівняння (6) здійснюється за такими формулами:

$$a_i = \sum_{v=0}^i (-1)^{i-v} C_{n-v}^{i-v} \alpha_v, \quad i = \overline{0, n}; \quad b_j = \sum_{v=0}^j (-1)^{j-v} C_{m-v}^{j-v} \beta_v, \quad j = \overline{0, m}. \quad (7)$$

Різницеве рівняння (7) слід розглядати як рекурентне співвідношення, за допомогою якого (крок за кроком) можна обчислити ординати функцій $y(kt_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, при відповідних значеннях $u(kt_0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ і заданих початкових умовах $y(0)$, $y(t_0), \dots, y((n-1)t_0)$. Для цього рівняння (6) необхідно розв'язати відносно старшої ординати. Отже,

$$\begin{aligned} y((k+n)t_0) = \frac{1}{a_0} (b_0 u((k+m)t_0) + b_1 u((k+m-1)t_0) + \dots + b_{m-1} u((k+1)t_0) + b_m u(kt_0) - \\ - a_1 y((k+n-1)t_0) - \dots - a_{n-1} y((k+1)t_0) + a_n y(kt_0)). \end{aligned} \quad (8)$$

За допомогою рекурентного співвідношення (8) можна обчислювати ординати вихідної величини лише в тому випадку, коли вхідна величина $u(kt_0)$ є функцією дискретного часу kt_0 . У тому випадку, коли необхідно знайти реакцію цифрової системи на стрибкоподібне вхідне збурення співвідношення дає невірний результат.

Нехай E – оператор зміщення: $Eu(kt_0) = u((k+1)t_0)$. Тоді різницю q -того порядку можна обчислити за такою формулою [7]:

$$\Delta^q u(kt_0) = (E - 1)^q u(kt_0). \quad (9)$$

За визначенням: $\Delta u(kt_0) = u((k+1)t_0) - u(kt_0)$. Приймаючи до уваги, оператор зміщення будемо мати

$$\Delta u(kt_0) = (E - 1)u(kt_0). \quad (10)$$

У тому випадку, коли на вхід цифрової системи подано стрибкоподібна вхідна величина, тоді $u(k t_0)$ – постійна величина для всіх значень $k = 0, 1, 2, \dots$. Тому $\Delta u(k t_0) = 0$. Оскільки має місце формула (10) і $u(k t_0) \neq 0$, то $E = 1$.

Отже, із формули (9) випливає, що при постійному значенні $u(k t_0)$, всі різниці $\Delta^q u(k t_0)$, $q = \overline{1, m}$ в рівнянні (4) набудуть нульових значень.

Це означає, що рекурентне співвідношення (8) можна використовувати лише в тому випадку, коли права частина математичної моделі (1) не вміщує похідних.

Для дискретизації математичної моделі (1) останню подамо в просторі станів [8].

Математичну модель (1) неперервної частини цифрової системи запишемо у такому вигляді:

$$\begin{aligned} A_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_0 y(t) = \\ = B_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + B_{n-1} \frac{d^{n-1} u(t)}{dt^{n-1}} + \dots + B_1 \frac{du(t)}{dt} + B_0 u(t). \end{aligned} \quad (11)$$

У диференціальному рівнянні (11) $m = n$. Якщо це не так, то прирівнявши коефіцієнти $B_{m+1}, B_{m+2}, \dots, B_n$ до нуля, прийдемо до моделі (1), зі зміненою індексацією параметрів.

Рівняння (11) можна подати у вигляді системи диференціальних рівнянь, кожне із яких є рівнянням першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_{i+1} + \beta_i u, \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{dx_n}{dt} &= -\frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^n A_{j-1} x_j + \beta_n u, \\ y &= x_1 + \beta_0 u. \end{aligned} \quad (12)$$

Значення коефіцієнтів β_i , $i = \overline{0, n}$ системи рівнянь (12) обчислюють як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=i}^n A_j \beta_{j-i} = B_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (13)$$

Систему рівнянь (13) у матрично-векторній формі має такий вигляд:

$$A_\beta \bar{\beta} = \bar{B}, \quad (14)$$

$$\text{де } A_p = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} & A_n \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n & 0 \\ A_2 & A_3 & A_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n-1} & A_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_n \end{bmatrix}.$$

Оскільки у рівнянні (14) A_p – верхня трикутна матриця, то лінійне алгебраїчне рівняння (13) розв’язується методом зворотної прогонки [8].

Тепер систему рівнянь (12) подамо також у матрично векторній формі. Отже,

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{\beta}_r u, \quad (15)$$

$$y = \bar{c}^T \bar{x} + \beta_0 u,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{A_0}{A_n} & -\frac{A_1}{A_n} & -\frac{A_2}{A_n} & \cdots & -\frac{A_{n-1}}{A_n} \end{bmatrix}, \bar{\beta}_r = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

У рівнянні (15) перші похідні замінімо їх наближеними значеннями, тобто

$$\frac{d\bar{x}}{dt} \square \frac{\bar{x}((k+1)t_0) - \bar{x}(kt_0)}{t_0}.$$

З врахуванням наближення (16) матрично-векторне рівняння (15) набуде такого вигляду:

$$\frac{\bar{x}((k+1)t_0) - \bar{x}(kt_0)}{t_0} = A\bar{x}(kt_0) + \bar{\beta}_r u(kt_0).$$

Отримане співвідношення дає змогу отримати рекурентну процедуру обчислення ординат вихідної величини цифрової системи у дискретні моменти часу

$$\bar{x}((k+1)t_0) = \bar{x}(kt_0) + t_0 (A\bar{x}(kt_0) + \bar{\beta}_r u(kt_0)). \quad (16)$$

Відмітимо, що точність обчислення ординат вихідної величини цифрової системи залежить від величини кроку дискретності t_0 , який повинен бути значно менший за тривалість перехідного процесу об’єкта керування.

Результати апробації методу дискретизації математичної моделі.
 Розглядається електричний об'єкт, схема якого зображена на рис. 1.

Рис. 1. Електрична схема об'єкта

Математичну модель об'єкта створена з використанням операторного методу. Допускаємо, що в початковий момент часу ємність C не заряджена. Отже,

$$U_1 = I(L_1 p + R_1) + U_2, \quad (17)$$

Струм в електричному колі визначимо на основі закону Кіргофа

$$I = U_2 Y_2(p), \quad (18)$$

$$\text{де } Y_2(p) = \frac{1}{L_2 p + R_2} + Cp.$$

З врахуванням значення провідності $Y_2(p)$, формула (18) набуде такого вигляду:

$$I = \frac{L_2 C p^2 + R_2 C p + 1}{L_2 p + R_2} U_2.$$

Після підстановки значення I у формулу (17) приходимо до такого результату:

$$\left(\frac{L_2}{R_2} L_1 C p^3 + \left(L_1 + \frac{R_1}{R_2} L_2 \right) C p^2 + \left(\frac{L_1 + L_2}{R_2} + R_1 C \right) p + \frac{R_1}{R_2} + 1 \right) U_2 = \left(\frac{L_2}{R_2} p + 1 \right) U_1.$$

Оскільки $p^i = \frac{d^i}{dt^i}$, то останній вираз набуде такого вигляду:

$$A_0 \frac{d^3 y}{dt^3} + A_1 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_2 \frac{dy}{dt} + A_3 y = B_0 \frac{du}{dt} + B_1 u, \quad (19)$$

$$\text{де } A_0 = \frac{L_2}{R_2} L_1 C, \quad A_1 = \left(L_1 + \frac{R_1}{R_2} L_2 \right) C, \quad A_2 = \frac{L_1 + L_2}{R_2} + R_1 C, \quad A_3 = \frac{R_1}{R_2} + 1, \quad y = U_2,$$

$$u = U_1.$$

Диференціальне рівняння (19) є математичною моделлю електричного об'єкта, яке подамо у просторі станів.

Оскільки порядок диференціального рівняння $n=3$, то рівняння (19) у просторі станів прийме вигляд (13), де

$$A_p = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & 0 \\ A_2 & A_3 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}.$$

Відмітимо, що індекси при коефіцієнтах в матрицях A_p і $\bar{B}$ співпадають з порядками відповідних похідних, а $B_2 = B_3 = 0$. Коефіцієнти β_i , $i = \overline{0,3}$ знайдено як розв'язок рівняння (14)

$$\bar{\beta} = A_p^{-1} \bar{B}. \quad (20)$$

Отже, рекурентна процедура обчислення ординат вихідної величини моделі (19) в дискретні моменти часу kt_0 визначається співвідношеннями (15), у яких відповідні матриці набудуть таких значень:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{A_0}{A_3} & -\frac{A_1}{A_3} & -\frac{A_2}{A_3} \end{bmatrix}, \bar{\beta}_r = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Допускаємо, що на вході об'єкта діє стрибкоподібне збурення:

$$u(kt_0) = \begin{cases} U_0 & \text{при } k \geq 0, \\ 0 & \text{при } k < 0, \end{cases}$$

де $U_0 = \text{const}$.

Після того як за формулою (20) визначенні значення величин β_i , $i = \overline{0,3}$, можна обчислити ординати вихідної величини моделі з використанням рекурентного співвідношення (16).

Для визначення точності розв'язання поставленої задачі визначимо точні значення ординат вихідної величини електричного об'єкта для будь-якого моменту часу t . Для цього знайдемо реакцію об'єкта на стрибкоподібну вхідну величину $u(t) = U_0 \cdot 1(t)$, допустивши, що початкові умови для диференціального рівняння (19) - нульові.

До диференціального рівняння (19) застосуємо перетворення Лапласа з врахуванням нульових початкових умов. Отже,

$$(A_0 p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3) Y(p) = (B_0 p + B_1) U(p).$$

Оскільки $U(p) = \frac{U_0}{p}$, то

$$Y(p) = U_0 \frac{B_0 p + B_1}{p(A_0 p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3)}. \quad (21)$$

Для знаходження оригіналу $y(t)$, застосуємо теорему про лишки [8], у відповідності з якою

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \text{Res}[Y(p)e^{pt}]_{p=p_i}, \quad (22)$$

У випадку простих полюсів функції $Y(p)$ їх лишки обчислюються за такою формулою:

$$\text{Res}[Y(p)e^{pt}]_{p=p_i} = \lim_{p \rightarrow p_i} (p - p_i) Y(p) e^{pt},$$

Полюси функції $Y(p)$, обчислимо як корені характеристичного рівняння

$$p(A_0 p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3) = 0. \quad (23)$$

Коренями характеристичного рівняння (23) будуть значення величин $p_0 = 0$, p_1 , p_2 і p_3 .

Допускаємо, що корені p_1 , p_2 і p_3 – різні. При цьому можливі два випадки – корені p_1 , p_2 і p_3 – дійсні і різні; серед коренів рівняння $A_0 p^3 + A_1 p^2 + A_2 p + A_3 = 0$ два комплексно-спряжених, а один із них дійсний, тобто $p_1 = -\alpha + j\beta$, $p_2 = -\alpha - j\beta$, $p_3 = -\lambda$.

Нехай корені p_1 , p_2 і p_3 – дійсні і різні. Тоді, використовуючи формулу (22), отримали

$$y(t) = U_0 \left(\frac{B_1}{A_3} + z_1 \frac{e^{p_1 t}}{p_1} + z_2 \frac{e^{p_2 t}}{p_2} + z_3 \frac{e^{p_3 t}}{p_3} \right), \quad (24)$$

$$\text{де} \quad z_1 = \frac{B_0 p_1 + B_1}{A_0 (p_1 - p_2)(p_1 - p_3)}; \quad z_2 = \frac{B_0 p_2 + B_1}{A_0 (p_2 - p_1)(p_2 - p_3)};$$

$$z_3 = \frac{B_0 p_3 + B_1}{A_0 (p_3 - p_1)(p_3 - p_2)}.$$

У тому випадку, коли є пара комплексно-спряжених коренів, а інший корінь дійсний, тоді застосування формули (22) дало такий результат:

$$y(t) = U_0 \left(\frac{B_1}{A_3} + \frac{1}{A_0 \beta} \cdot \frac{\theta_1 \phi_1 - \phi_2 \theta_2}{\theta_1^2 + \theta_2^2} e^{-\alpha t} + \frac{1}{A_0 \lambda} \cdot \frac{B_0 \lambda - B_1}{(\alpha - \lambda)^2 + \beta^2} e^{-\gamma t} \right), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad \pi_1 &= -\alpha B_0 + B_1; \pi_2 = B_0 \beta_1; & \varphi_1 &= \pi_1 \cos(\beta t) - \pi_2 \sin(\beta t); \\ \varphi_2 &= \pi_2 \cos(\beta t) + \pi_1 \sin(\beta t); \\ \theta_1 &= (2\alpha - \lambda)\beta; \theta_2 = \beta^2 + (\lambda - \alpha)\alpha; \alpha > 0, \beta > 0, \lambda > 0. \end{aligned}$$

За допомогою розробленого програмного забезпечення в середовищі MatLab побудований графік за рекурентною процедурою (16) для двох варіантів. У першому варіанті були вибрані такі значення електричних параметрів об'єкта: $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $L_1 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$, $L_2 = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ Гн}$, $C = 3,5 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$; $N = 800$, $U_0 = 12 \text{ В}$; $t_0 = 10^{-4} \text{ с}$.

На рис. 2, а зображені графіки перехідного процесу об'єкта, які побудовані за формулами (16) та (25), при стрибкоподібній зміні вхідного сигналу. На рис.2 прийняті такі позначення: data 1 – ординати обчислені за рекурентною процедурою (16); data 2 – точні значення ординат.

Аналіз рис. 2 показує, що при вибраних параметрах електричного об'єкта мав місце коливний перехідний процес.

Для оцінки точності запропонованого методу дискретизації обчислена максимальна похибка дискретизації за такою формулою:

$$Er = \max \left| \left(y(t) - y(kt_0) \right) \right|.$$

Для вибраного часу дискретності $t_0 = 10^{-4} \text{ с}$ максимальна похибка дискретизації була такою: $Er = 4,4123 \cdot 10^{-1}$.

Похибка дискретизації зменшується при зменшенні часу дискретності t_0 . На рис. 2б зображений графік перехідного процесу при $t_0 = 10^{-5} \text{ с}$. У цьому випадку похибка дискретизації була такою: $Er = 3,9317 \cdot 10^{-2}$.

Рис.2. Графіки перехідного процесу електричного об'єкта

Другий варіант побудови перехідного процесу (рис. 3) був реалізований при таких параметрах електричного об'єкта: $R_1 = 40 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $L_1 = 2,5 \cdot 10^{-1} \text{ Гн}$, $L_2 = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ Га}$, $C = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ Ф}$; $t_0 = 10^{-3}$, $N = 500$, $U_0 = 12$.

Рис. 3. Аперіодичний перехідний процес електричного об'єкта

Як показує рис. 3, при заданих параметрах електричного об'єкта мав місце аперіодичний перехідний процес. У цьому випадку похибка дискретизації набула такого значення: $Er = 1,9780 \cdot 10^{-2}$.

Таким чином, похибка дискретизації залежить не тільки від часу дискретності, але й від характеру перехідного процесу. При аперіодичному перехідному процесові похибка дискретизації значно менша навіть при більшому часові дискретності.

Висновки. 1 Метод дискретизації лінійного диференціального рівняння за формулами (2) і (3) можливі лише в тому випадку, коли вхідна величина є функцією часу, або права частина диференціального рівняння не вміщує похідних.

2 У тому випадку, коли права частина диференціального рівняння вміщує похідні, а вхідна величина об'єкта – постійна величина дискретизація можлива лише за умови, що математична модель об'єкта подана у просторі станів.

3 Метод дискретизації, заснований на заміні похідних кінцевими різницями не є точним. Похибка дискретизації залежить як від часу дискретності, так і від характеру перехідного процесу. Для аперіодичних перехідних процесів похибка дискретизації є значно меншою у порівнянні з

коливними перехідними процесами. Зі зменшенням часу дискретності похибка дискретизації зменшується.

Література:

1. Feuer A., Goodwin G. C. Sampling in Digital Signal Processing and Control. Birkhauser Boston: Cambridge Mass. 1996.
2. Goodwin G. C., Middleton R. H., Poor H. V. High-speed digital signal processing and control // IEEE Processing's, 1992, 80(2), P. 240 - 259.
3. Middleton R. H., Goodwin G. C. Digital Control and Estimation A Unified Approach. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1990.
4. Гудвин Д. К., Гребен С. Ф., Сальгадо М. Э. Проектирование систем управления: пер. с англ. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2004, с. 911.
5. Изерман Р. Цифровые системы управления: пер. с англ. М.: Мир, 1984, с. 541.
6. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: підручник. 2-ге вид., перероб. К.: Либідь, 2007, с. 656.
7. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. 2-е изд., испр. и доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016, с. 312.
8. Горбійчук М. І., Пістун Є. П. Числові методи і моделювання на ЕОМ. Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2010, с. 408.

References:

1. Feuer, A., & Goodwin, G. C. (1996). *Sampling in Digital Signal Processing and Control*. Birkhauser Boston: Cambridge Mass.
2. Goodwin, G. C., Middleton, R. H., & Poor, H. V. (1992). *High-speed digital signal processing and control*. IEEE Processing's, 80(2), 240 - 259.
3. Middleton, R. H., & Goodwin, G. C. (1990). *Digital Control and Estimation A Unified Approach*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.
4. Hudvyn, D. K., Hrebe, S. F., Salhaddo, M. Э. (2004). *Proektyrovanye system upravleniya: per. s anhl. [Control system design: per. from English]*. Moscow: BYNOM. Laboratoryia znanyi a [in Russian].
5. Yzerman, R. (1984). *Tsyfrovyye systemy upravleniya: per. s anhl. [Digital control systems: per. from English]*. Moscow: Myr a [in Russian].
6. Popovych, M. H., & Kovalchuk, O. V. (2007). *Teoriia avtomatichnoho keruvannia [Theory of automatic control.]*. (2nd ed., rev.). Kyiv: Lybid [in Ukrainian].
7. Kym, D. P. (2016). *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Lyneinyye systemy [Theory of automatic control. T. 1. Linear systems.]* (2nd ed., rev.). Moscow: FYZMATLYT a [in Russian].
8. Horbiichuk, M. I., & Pistun, Ye. P. (2010) *Chyslovi metody i modeliuvannia na EOM. [Numerical methods and computer simulation]*. Ivano-Frankivsk: IFNTUNH [in Ukrainian].